Teorema di De Giorgi

1. Teorema di De Giorgi

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $f \in L^1(\Omega)$. Ricordiamo che una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f \quad \text{in} \quad \Omega\ ,$$

se

$$\int_\Omega \nabla u\, A(x)\big[\nabla v\big]^t\,dx = \int_\Omega f(x) v\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad v \in H^1_0(\Omega),$$

dove in questa sezione la matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(x) & \dots & a_{dd}(x) \end{pmatrix}$$

è una matrice simmetrica ed uniformemente ellittica a coefficienti variabili

$$a_{ij} \equiv a_{ji}\,:\,\Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{per} \qquad 1 \le i, j \le d,$$

che sono funzioni misurabili su Ω tali che

$$c_{\rm A}\,\mathrm{Id} \le A(x) \le C_{\rm A}\,\mathrm{Id} \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

dove $0 < c_{\rm A} \le C_{\rm A}$ sono costanti.

In questa nota dimostreremo il teorema seguente.

Teorema 1 (De Giorgi). *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $A(x)$ una matrice simmetrica a coefficienti variabili su Ω che soddisfa (1). Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = 0 \quad \textit{in} \quad \Omega,$$

Allora

$$u \in C^{0,\alpha}(\Omega),$$

ovvero per ogni $x_0 \in \Omega$ esistono un raggio $r > 0$ ed una costante $L > 0$ tali che

$$|u(x) - u(y)| \le L|x-y|^\alpha \qquad \textit{per ogni} \qquad x, y \in B_r(x_0).$$

Osserviamo che vale anche il seguente teorema più generale.

Teorema 2 (De Giorgi). *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $A(x)$ una matrice simmetrica a coefficienti variabili su Ω che soddisfa (1). Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f \quad \textit{in} \quad \Omega,$$

dove $f \in L^p(\Omega)$ con $p > d/2$. Allora

$$u \in C^{0,\alpha}(\Omega),$$

ovvero per ogni $x_0 \in \Omega$ esistono un raggio $r > 0$ ed una costante $L > 0$ tali che

$$|u(x) - u(y)| \le L|x-y|^\alpha \qquad \textit{per ogni} \qquad x, y \in B_r(x_0).$$

2. Disuguaglianze di Caccioppoli

Lemma 3 (Disuguaglianza di Caccioppoli). *Se $u \in H^1(B_1)$ è soluzione del problema*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f \quad \textit{in} \quad B_1\ ,$$

dove

$$c_A\,\mathrm{Id} \le A(x) \le C_A\,\mathrm{Id} \quad \textit{per ogni} \quad x \in \Omega,$$

Allora, per ogni $\varphi \in C^\infty_c(B_1)$ si ha

$$c_A \int_{B_1} |\nabla(\varphi u)|^2\,dx \le C_A \int_{B_1} |\nabla\varphi|^2 u^2\,dx + \int_{B_1} \varphi^2 u f\,dx.$$

Lemma 4 (Disuguaglianza di Caccioppoli II)**.** *Se $u \in H^1(B_1)$ è soluzione del problema*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f \quad \textit{in} \quad B_1 \ ,$$

dove

$$c_A \,\mathrm{Id} \le A(x) \le C_A \,\mathrm{Id} \quad \textit{per ogni} \quad x \in \Omega,$$

Allora, per ogni $\varphi \in C^\infty_c(B_1)$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$c_A \int_{B_1} \big|\nabla\big(\varphi(u-t)_+\big)\big|^2\,dx \le C_A \int_{B_1} |\nabla\varphi|^2(u-t)_+^2\,dx + \int_{B_1} \varphi^2(u-t)_+ f\,dx.$$

3. Stima $L^2 - L^\infty$

Lemma 5. *Sia $u \in H^1(B_\rho)$ una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = 0 \quad \textit{in} \quad B_\rho \ ,$$

dove la matrice A è tale che:

$$c_A \,\mathrm{Id} \le A(x) \le C_A \,\mathrm{Id} \quad \textit{per ogni} \quad x \in B_\rho\,.$$

Allora,

$$\|u_+\|^2_{L^\infty(B_{\rho/2})} \le \kappa_A^{d/2}\, C_d \fint_{B_\rho} u_+^2\,dx,$$

dove $\kappa_A = \frac{C_A}{c_A}$.

Proof. Dimostreremo il lemma in dimensione $d \ge 3$.

- Siano $\varphi \in C^\infty_c(B_1)$ e $T > 0$. Allora

$$\int \big|\nabla\big(\varphi(u-T)_+\big)\big|^2\,dx \le \kappa_{\mathrm{A}} \int |\nabla\varphi|^2(u-T)_+^2\,dx\,.$$

- Usando la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, dedurre che

$$\left(\int \big(\varphi(u-T)_+\big)^{\frac{2d}{d-2}}\,dx\right)^{\frac{d-2}{d}} \le \kappa_{\mathrm{A}}\, C_d \int |\nabla\varphi|^2(u-T)_+^2\,dx.$$

- Ora, supponiamo che

$$\varphi = 1 \quad \text{in} \quad B_r\ , \qquad 0 \le \varphi \le 1 \quad \text{in} \quad B_R \setminus B_r\ , \qquad \varphi = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus B_R\ .$$

  Quindi

$$\kappa_{\mathrm{A}}\, C_d \int_{B_R} |\nabla\varphi|^2(u-T)_+^2\,dx \le \frac{\kappa_{\mathrm{A}}\, C_d}{(R-r)^2} \int_{B_R} (u-T)_+^2\,dx$$

  ed anche

$$\int_{B_r} (u-T)_+^2\,dx \le |\Omega_T \cap B_r|^{\frac{2}{d}} \left(\int_{B_r} (u-T)_+^{\frac{2d}{d-2}}\right)^{\frac{d-2}{d}} \le |\Omega_T \cap B_r|^{2/d} \left(\int_{B_R} \big(\varphi(u-T)_+\big)^{\frac{2d}{d-2}}\right)^{\frac{d-2}{d}}$$

  Di conseguenza,

$$\int_{B_r} (u-T)_+^2\,dx \le |\Omega_T \cap B_r|^{2/d} \frac{\kappa_{\mathrm{A}}\, C_d}{(R-r)^2} \int_{B_R} (u-T)_+^2\,dx.$$

- Consideriamo ora $t \in (0,T)$ e stimiamo il temine di misura:

$$|\Omega_T \cap B_r| = \int_{B_r \cap \Omega_T} 1\,dx \le \frac{1}{(T-t)^2} \int_{B_r \cap \Omega_T} (u-t)_+^2\,dx \le \frac{1}{(T-t)^2} \int_{B_r} (u-t)_+^2\,dx$$

- In conclusione,

$$\int_{B_r} (u-T)_+^2\,dx \le \frac{\kappa_{\mathrm{A}}\, C_d}{(R-r)^2(T-t)^{4/d}} \left(\int_{B_R} (u-t)_+^2\,dx\right)^{1+\frac{2}{d}}. \tag{2}$$

- Ora, possiamo scrivere la nostra stima iterativa. Per ogni $k \geq 1$ definiamo
$$R_k = \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}\Big)R \qquad \text{e} \qquad T_k = T\Big(1 - \frac{1}{2^k}\Big).$$
In particolare,
$$T_0 = 0\ , \quad R_0 = R\ , \quad T_\infty = T\ , \quad R_\infty = \frac{R}{2}\ .$$
Ponendo
$$M_k = \int_{B_{R_k}} (u - T_k)_+^2\, dx$$
e usando (2), otteniamo
$$M_{k+1} \leq \frac{\kappa_{\mathrm{A}}\, C_d}{R^2 T^{4/d}} \left(4^{1+\frac{2}{d}}\right)^k M_k^{1+\frac{2}{d}}.$$
- Il lemma di De Giorgi ora implica che se
$$M_0 = \int_{B_R} u^2\, dx \leq \frac{C_d}{\kappa_{\mathrm{A}}^{d/2}} \big(R^2 T^{4/d}\big)^{d/2} = \frac{C_d}{\kappa_{\mathrm{A}}^{d/2}} R^d T^2,$$
allora
$$\int_{B_{R/2}} (u - T)_+^2\, dx = 0,$$
ovvero
$$\|u_+\|^2_{L^\infty(B_{R/2})} \leq \kappa_{\mathrm{A}}^{d/2}\, C_d \fint_{B_R} u_+^2\, dx. \quad \square$$

Corollario 6. *Se $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione di*
$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = 0 \quad \mathit{in} \quad \Omega\ ,$$
allora u è localmente limitata in Ω.

4. Stima della misura degli insiemi di livello

Esercizio 7. *Sia Ω un insieme di misura finita in $\mathbb{R}^d$. Allora*
$$\int_\Omega \frac{dx}{|x|^{d-1}} \leq C_d |\Omega|^{1/d},$$
dove C_d è una costante dimensionale.

Lemma 8. *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in C^1(B_R)$. Siano $t < T$ due numeri reali. Allora,*
$$|\{u \leq t\} \cap B_R|\, |\{u \geq T\} \cap B_R|^{1-\frac{1}{d}} \leq \frac{C_d}{T - t} |B_R| \int_{B_R} |\nabla u|\, dx,$$
dove C_d è una costante dimensionale.

Proof. Sia $x_0 \in B_R \cap \{u \geq T\}$. Stimeremo il volume di $\{u \leq t\}$ in B_R in termini di $|\nabla u|$. Poniamo
$$\varphi(x) := u(x - x_0)\ , \qquad \varphi : B_R(-x_0) \to \mathbb{R},$$
e osserviamo che possiamo scrivere gli insiemi $B_R(-x_0)$ e $B_R(-x_0) \cap \{\varphi \leq t\}$ in coordiante polari come
$$B_R(-x_0) := \Big\{(r, \theta)\ :\ \theta \in \partial B_1, \quad r \in [0, R_\theta)\Big\},$$
$$B_R(-x_0) \cap \{\varphi \leq t\} := \Big\{(r, \theta)\ :\ \theta \in \partial B_1, \quad r \in I_\theta\Big\},$$
dove per ogni θ,
$$I_\theta := \Big\{r > 0\ :\ r\theta \in B_r(-x_0) \cap \{\varphi \leq t\}\Big\} \qquad \text{e} \qquad (0, R_\theta) = \Big\{r > 0\ :\ r\theta \in B_r(-x_0)\Big\}.$$

Ora, per ogni punto
$$x = (r, \theta) \in \{\varphi \leq t\},$$
abbiamo che
$$T - t \leq |\varphi(x) - \varphi(0)| = |\varphi(r\theta) - \varphi(0)| \leq \left|\int_0^r \theta \cdot \nabla\varphi(s\theta)\, ds\right| \leq \int_0^r |\nabla\varphi|(s\theta)\, ds.$$

Integrando su $\{\varphi \le 0\}$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
|\{u \le t\} \cap B_R| &= |\{\varphi \le t\} \cap B_R(-x_0)| \\
&= \int_{\partial B_1} \int_{I_\theta} r^{d-1}\, dr\, d\theta \\
&= \frac{1}{T-t} \int_{\partial B_1} \int_{I_\theta} r^{d-1} |\varphi(r\theta) - \varphi(0)|\, dr\, d\theta \\
&\le \frac{1}{T-t} \int_{\partial B_1} \int_{I_\theta} r^{d-1} \left(\int_0^r |\nabla \varphi|(s\theta)\, ds \right) dr\, d\theta \\
&\le \frac{1}{T-t} \int_{\partial B_1} \int_{I_\theta} r^{d-1} \left(\int_0^{R_\theta} \frac{1}{s^{d-1}} |\nabla \varphi|(s\theta) s^{d-1}\, ds \right) dr\, d\theta.
\end{aligned}$$

Siccome la misura di I_θ è minore di $2R$ e $r \le 2R$ per $r \in I_\theta$, abbiamo

$$\int_{I_\theta} r^{d-1}\, dr \le (2R)^{d-1} |I_r| \le 2^d R^d,$$

e quindi

$$|\{u \le t\} \cap B_R| \le \frac{C_d}{T-t} |B_R| \int_{\partial B_1} \int_0^{R_\theta} \frac{1}{s^{d-1}} |\nabla \varphi|(s\theta) s^{d-1}\, ds\, d\theta = \frac{C_d}{T-t} |B_R| \int_{B_R} \frac{|\nabla u|(x)}{|x-x_0|^{d-1}} dx.$$

Integrando nella variabile $y = x_0$ su $\{u \ge T\} \cap B_R$ otteniamo

$$\begin{aligned}
|\{u \le t\} \cap B_R|\, |\{u \ge T\} \cap B_R| &\le C_d |B_R| \int_{\{u \ge T\} \cap B_R} \int_{B_R} \frac{|\nabla u|(x)}{|x-y|^{d-1}}\, dx\, dy \\
&\le C_d |B_R| \int_{B_R} |\nabla u|(x) \left(\int_{\{u \ge T\} \cap B_R} \frac{dy}{|x-y|^{d-1}} \right) dx \\
&\le C_d |B_R|\, |\{u \ge T\} \cap B_R|^{1/d} \int_{B_R} |\nabla u|\, dx,
\end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato il risutato dell'esercizio precedente. □

Lemma 9. *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R)$. Siano $t < T$ due numeri reali. Allora,*

$$|\{u \le t\} \cap B_R|\, |\{u \ge T\} \cap B_R|^{1-\frac{1}{d}} \le \frac{C_d}{T-t} |B_R| \int_{B_R} |\nabla u|\, dx,$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Proof. Sia φ_n una successione di funzioni C^1 che converge a u fortemente in $H^1(B_R)$ e puntualmente quasi-ovunque in B_R. Fissato $\varepsilon > 0$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
|\{\varphi_n < t+\varepsilon\} \cap B_R|\, |\{\varphi_n > T-\varepsilon\} \cap B_R|^{1-\frac{1}{d}} &\le |\{\varphi_n \le t+\varepsilon\} \cap B_R|\, |\{\varphi_n \ge T-\varepsilon\} \cap B_R|^{1-\frac{1}{d}} \\
&\le \frac{C_d}{T-t-2\varepsilon} |B_R| \int_{B_R} |\nabla \varphi_n|\, dx,
\end{aligned}$$

Siccome, φ_n converge puntualmente a u, abbiamo che

$$\mathbb{1}_{\{u > t+\varepsilon\}} \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{\varphi_n > t+\varepsilon\}} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{1}_{\{u < T-\varepsilon\}} \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{\varphi_n < T-\varepsilon\}}.$$

Di conseguenza,

$$|\{u < t+\varepsilon\} \cap B_R|\, |\{u > T-\varepsilon\} \cap B_R|^{1-\frac{1}{d}} \le \frac{C_d}{T-t-2\varepsilon} |B_R| \int_{B_R} |\nabla u|\, dx.$$

Ora, per il lemma di Fatou,

$$|\{u \le t\} \cap B_R| = \lim_{\varepsilon\to 0} |\{\varphi_n < t+\varepsilon\} \cap B_R| \qquad \text{e} \qquad |\{u \ge T\} \cap B_R| = \lim_{\varepsilon\to 0} |\{\varphi_n > T-\varepsilon\} \cap B_R|,$$

e quindi, passando al limite per $\varepsilon \to 0$, abbiamo la tesi. □

Come corollario, otteniamo la stima che useremo nella sezione successiva per completare la dimostrazione del teorema di De Giorgi è la seguente.

Proposizione 10. *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$, $u \in H^1(B_R)$ e $t > T$ due numeri reali. Allora*

$$|\{u \le t\} \cap B_R|\, |\{u \ge T\} \cap B_R|^{1-1/d} \le C_d |B_R|\, |\{t < u < T\} \cap B_R|^{1/2} \left(\int_{B_R} |\nabla(u-t)_+|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

In particolare, se

$$\frac{|\{u \le t\} \cap B_R|}{|B_R|} \ge \frac{1}{2},$$

allora

$$|\{u \ge T\} \cap B_R|^{1-1/d} \le C_d\, |\{t < u < T\} \cap B_R|^{1/2} \frac{1}{T-t} \left(\int_{B_R} |\nabla(u-t)_+|^2\,dx\right)^{1/2},$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Proof. Applicando il lemma precedente alla funzione $v := T \wedge (u-t)_+$, abbiamo

$$|\{u \le t\} \cap B_R|\, |\{u \ge T\} \cap B_R|^{1-\frac{1}{d}} = |\{v \le 0\} \cap B_R|\, |\{v \ge T-t\} \cap B_R|^{1-\frac{1}{d}} \le \frac{C_d}{T-t} |B_R| \int_{B_R} |\nabla v|\,dx.$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

$$\int_{B_R} |\nabla v|\,dx \le |\{|\nabla v| \ne 0\} \cap B_R|^{1/2} \left(\int_{B_R} |\nabla v|^2\,dx\right)^{1/2} \le |\{t < u < T\} \cap B_R|^{1/2} \left(\int_{B_R} |\nabla(u-t)_+|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

□

5. Controllo dell'oscillazione

Lemma 11. *Sia $u \in H^1(B_{2R})$ una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = 0 \quad \textit{in} \quad B_{2R}\,,$$

dove la matrice A è tale che:

$$c_A\,\mathrm{Id} \le A(x) \le C_A\,\mathrm{Id} \quad \textit{per ogni} \quad x \in B_{2R}\,.$$

Esiste una costante $\eta \in (0,1)$ tale che, se

$$\operatorname*{osc}_{B_{2R}} u \le 2,$$

allora

$$\operatorname*{osc}_{B_{R/2}} u \le 2 - \eta.$$

Proof. Possiamo supporre che

$$\max_{B_{2R}} u \le 1 \qquad \text{e} \qquad \min_{B_{2R}} u \ge -1.$$

Osserviamo che ci sono due casi:

$$\frac{|\{u < 0\} \cap B_R|}{|B_R|} \le \frac{1}{2} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{|\{u > 0\} \cap B_R|}{|B_R|} \le \frac{1}{2}.$$

Supponiamo di avere

$$\frac{|\{u > 0\} \cap B_R|}{|B_R|} \le \frac{1}{2}.$$

Mostreremo che esiste una costante $\eta > 0$ tale che

$$u \le 1 - \eta \quad \text{in} \quad B_{R/2}. \tag{3}$$

Consideriamo la successione

$$T_k := 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \qquad \text{e} \qquad M_k := \big|\{u > T_k\} \cap B_R\big|.$$

Osserviamo che la successione M_k è decrescente. Inoltre, per Proposizione 10 abbiamo la stima

$$M_{k+1}^{2-\frac{2}{d}} \le C_d (M_k - M_{k+1}) 4^k \int_{B_R} |\nabla(u - T_k)_+|^2\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad k \ge 0. \tag{4}$$

Step 1. Mostreremo che il termine

$$4^k \int_{B_R} |\nabla(u - T_k)_+|^2\,dx$$

si può stimare con una costante che non dipende da k. Infatti, per la disuguaglianza di Caccioppoli abbiamo

$$\int_{B_R} |\nabla(u-T_k)_+|^2\,dx \le \frac{C_{\rm A}}{c_{\rm A}}\frac{C_d}{R^2}\int_{B_{2R}}(u-T_k)_+^2\,dx$$

e siccome

$$(u-T_k)_+\le 1-T_k \qquad \text{su} \qquad B_{2R},$$

otteniamo che

$$\int_{B_R} |\nabla(u-T_k)_+|^2\,dx \le \frac{C_{\rm A}}{c_{\rm A}}\frac{C_d}{R^2}4^{-k}|B_{2R}|.$$

e quindi

$$4^k\int_{B_R} |\nabla(u-T_k)_+|^2\,dx \le \frac{C_{\rm A}}{c_{\rm A}}\frac{C_d}{R^2}|B_{2R}|.$$

Sostituendo in (4), otteniamo

$$M_{k+1}^{2-\frac{2}{d}} \le \frac{C_{\rm A}}{c_{\rm A}}C_dR^{d-2}(M_k-M_{k+1}) \qquad \text{per ogni} \qquad k\ge 0\,.$$

Step 2. Sommando queste disuguaglianze per $k=0,\dots,N-1$, otteniamo

$$NM_N^{2-\frac{2}{d}} \le \sum_{k=0}^{N-1}M_{k+1}^{2-\frac{2}{d}} \le \frac{C_{\rm A}}{c_{\rm A}}C_dR^{d-2}\sum_{k=0}^{N-1}\big(M_k-M_{k+1}\big) \le \frac{C_{\rm A}}{c_{\rm A}}C_dR^{d-2} \le \frac{C_{\rm A}}{c_{\rm A}}C_dR^{2d-2},$$

ovvero

$$M_N^{\frac{2d-2}{d}} \le \frac{C_{\rm A}}{c_{\rm A}}\frac{C_d}{N}R^{2d-2}$$

che possiamo scrivere anche come

$$M_N \le C_d\left(\frac{C_{\rm A}}{c_{\rm A}}\frac{1}{N}\right)^{\frac{d}{2d-2}}|B_R|.$$

Conclusione. Infine, dalla stima L^2-L^∞ si ottiene che

$$\|(u-T_N)_+\|^2_{L^\infty(B_{R/2})} \le \left(\frac{C_{\rm A}}{c_{\rm A}}\right)^{d/2}C_d\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}(u-T_N)_+^2\,dx \le \left(\frac{C_{\rm A}}{c_{\rm A}}\right)^{d/2}C_d\left(\frac{C_{\rm A}}{c_{\rm A}}\frac{1}{N}\right)^{\frac{d}{2d-2}}(1-T_N)^2\,.$$

Ora, poniamo

$$\varepsilon^2 := C_d\left(\frac{C_{\rm A}}{c_{\rm A}}\right)^{\frac{1}{2(d-1)}}\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{d}{2d-2}}.$$

e osserviamo che scegliendo N abbastanza grande (in funzione di $\frac{C_{\rm A}}{c_{\rm A}}$ e la dimensione d), abbiamo

$$0<\varepsilon<1.$$

Ora, calcoliamo

$$\begin{aligned}\|u_+\|_{L^\infty(B_{R/2})} &\le T_N+\|(u-T_N)_+\|_{L^\infty(B_{R/2})}\\ &\le T_N+\varepsilon(1-T_N)\\ &=1-(1-\varepsilon)(1-T_N),\end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione di (3) con

$$\eta=(1-\varepsilon)(1-T_N).$$

Osserviamo che η è una costante che dipende solo dalla dimensione d e del rapporto $\frac{C_{\rm A}}{c_{\rm A}}$. $\square$